3. Ako je $u=f(M)$ neprekidna u M_0 i $f(M_0)\neq 0$ onda postoji δ- okolina tačke $U_\delta(M_0)$ takva da za sve $M\in U_\delta(M_0)$, znak vrijednosti $f(M)$ je isti kao i znak $f(M_0)$

4. Ako je funkcija $u=f(M)$ neprekidna na povezanom skupu D i $f(A)$ i $f(B)$ njene vrijednosti u tačkama A i $B\in D$, onda za proizvoljno $\alpha\in[f(A), f(B)]$ postoji $C\in D$, takvo da je $f(C)=\alpha$.

5. Vajerštrasova teorema

Ako je $u=f(M)$ neprekidna na ograničenom i zatvorenom skupu $D\subset\mathbb{R}^n$, onda je ona ograničena na tom skupu i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost u nekim tačkama M_1 i M_2 iz tog skupa.

Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih

Parcijalni izvodi

Neka je data fja tri promjenljive $u=f(x,y,z)$ definisana u oblasti D i neka je $M_0(x_0,y_0,z_0)$ neka tačka te oblasti. Fiksirajmo vrijednosti y i z, pretpostavljajući da je $y=y_0$ i $z=z_0$. U rezultatu dobijamo fju $u=f(x,y_0,z_0)$ jedne promjenljive x. Ako je ta fja za $x=x_0$ diferencijabilna, odnosno, ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(M_0)}{\Delta x}$$

onda tu graničnu vrijednost nazivamo <u>parcijalnim izvodom</u> fje $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj x u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ i označavamo ga sa

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\ \text{ili}\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\ \text{ili}\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\ \text{ili}\ f'_x(M_0).$$

Znači,
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(M_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

Analogno definišemo i parcijalne izvode po promjenljivim y i z, tj.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u(M_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$

Primjer Naći parcijalne izvode funkcije

$$u = 3x^2yz^3 - 5xz^2 - 4yz + 5x - 3z + 7 \text{ u } M_0(1,2,-1).$$

Rješenje

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} = \left(6xyz^3 - 5z^2 + 5\right)\Big|_{M_0} = -12$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} = \left(3x^2z^3 - 4z\right)\Big|_{M_0} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} = \left(9x^2yz^2 - 10xz - 4y - 3\right)\Big|_{M_0} = 17$$

Primjer Naći parcijalne izvode fje $u = x^{y^z}$.

Rješenje $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot z \cdot y^{z-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y$$

Egzistencija svih parcijalnih izvoda u tački ne garantuje njenu neprekidnost u toj tački

Primjer Naći parcijalne izvode fje

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

u tački $(0,0)$ i ispitati neprekidnost u tački $(0,0)$.

Rješenje $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$

ali fja nije neprekidna u $(0,0)$.

Diferencijabilnost fje više promjenljivih

Definicija Fja $u=f(x,y,z)$ se naziva diferencijabilnom u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ako u nekoj okolini te tačke totalni priraštaj funkcije možemo predstaviti u obliku:

$$\Delta u(M_0) = A\cdot\Delta x + B\,\Delta y + C\cdot\Delta z + o(\rho) \quad (3)$$

gdje su A,B,C - neke konstante, $\Delta x = x-x_0$, $\Delta y = y-y_0$, $\Delta z = z-z_0$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ - rastojanje između tačaka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ i $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ i

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0.$$

Teorema (Neophodni uslovi diferencijabilnosti)
Ako je fja $u=f(x,y,z)$ diferencijabilna u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ onda u toj tački postoje parcijalni izvodi po svim promjenljivim, pri čemu je:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=A, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=B, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=C.$$

Dokaz Za tačku $(x_0+\Delta x, y_0, z_0)$ (gdje je $\Delta y=\Delta z=0$) imamo da je $\Delta u(M_0)=A\,\Delta x + o(|\Delta x|)$, odnosno

$$f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0) = A\Delta x + o(|\Delta x|) \Big/ :\Delta x$$

Dobijamo
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=A.$$

Analogno za ostale parcijalne izvode $\blacktriangle$

Znači, iz diferencijabilnosti fje f u tački M slijedi egzistencija njenih parcijalnih izvoda u toj tački i važi da se njen totalni priraštaj fje f u M može zapisati:

$$\Delta u(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z+o(\rho).$$

Jasno je da ako je fja f diferencijabilna u M_0 onda je fja f neprekidna u M_0

Obratno ne važi, tj. iz neprekidnosti fje i postojanja parcijalnih izvoda ne slijedi diferencijabilnost.

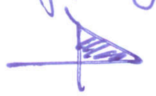
Primjer Data ~~je~~ fja $f(x,y)=\sqrt{|x||y|}$

Ova fja je neprekidna u $(0,0)$ tj $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

Osim toga $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0.$

Međutim, ova fja nije diferencijabilna u $(0,0)$. Zaista, neka je $y=x$, $f(x,x)=\sqrt{|x|^2}=|x|$, a fja $|x|$ nije diferencijabilna za $x=0$. Znači, fja $f(x,y)=\sqrt{|x||y|}$ nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.



Teorema Ako ~~je~~ fja $z=f(x,y)$ u okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$ ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, onda je ona diferencijabilna u tački M_0.

Za fju n-promjenljivih diferencijabilnost se uvodi analogno. Fja $u=f(x_1,x_2,..,x_n)$ je diferencijabilna u tački $M_0(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)$ ako ~~njen~~ totalni priraštaj ~~je~~ u toj tački možemo zapisati u obliku:

$$\Delta u(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n+o(\rho)$$

gdje je $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$.

Funkcija koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ naziva se neprekidno diferencijabilnom fjom ili glatkom fjom.

Diferencijal fje više promjenljivih

<u>Definicija</u> Ako je fja $u=f(x,y,z)$ diferencijabilna u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ onda izraz $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z$ koji je linearna fja priraštaja $\Delta x,\Delta y,\Delta z$, nazivamo totalnim diferencijalom ili diferencijalom fje f u tački M_0 i označavamo ga sa $df(M_0)$ ili $du(M_0)$.

Znači, diferencijal fje f u tački M_0 je

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z.$$

Za nezavisne promjenljive x,y i z imamo da je $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$ i $\Delta z=dz$. Tada diferencijal možemo zapisati kao:

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz.$$

Također znamo da je $\underline{\Delta u(M_0)=du(M_0)+o(\rho)}$ (4)

odnosno, totalni priraštaj je jednak zbiru totalnog diferencijala i beskonačno male fje kad $\rho\to 0$.

<u>Primjer</u> Naći diferencijal fje $z=\ln(x^2+y^2)$ u $M_0(1,2)$

<u>Rješenje</u> $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{5}$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{4}{5}$

$$dz(M_0)=\frac{2}{5}dx+\frac{4}{5}dy$$

Diferencijal možemo iskoristiti za približno računanje vrijednosti fje u tački. Iz formule (4) imamo da je $\Delta u(M_0)\approx du(M_0)$, odnosno

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta z,z_0+\Delta z)\approx f(x_0,y_0,z_0)+df(x_0,y_0,z_0)$$

Primjer Približno izračunati $\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}$.

Rješenje Uzmimo fju $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Neka je $M_0(x_0,y_0) \Rightarrow x_0=4,\ y_0=3$

Dalje, uzmimo $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$.

$$\frac{\partial f(4,3)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(4,3)}=\frac{4}{5},\quad f(4,3)=5$$

$$\frac{\partial f(4,3)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(4,3)}=\frac{3}{5},$$

Tada imamo da je:

$$\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}\approx 5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot 0{,}07=5{,}082.$$

Diferenciranje složenih funkcija

Neka je zadata neprekidno-diferencijabilna fja $u=f(x,y,z)$ tri promjenljive i neka su x,y i z - neprekidno-diferencijabilne fje promjenljive t, odnosno, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Time je definisana složena fja

$$u=f(x(t),y(t),z(t))=F(t)$$ jedne promjenljive t.

Neka je Δt priraštaj promjenljive t. Tada je

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t),\ \Delta y=y(t+\Delta t)-y(t),\ \Delta z=z(t+\Delta t)-z(t)$$

pri čemu $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ kad $\Delta t\to 0$.

Zbog diferencijabilnosti fje $u=f(x,y,z)$ imamo da je njen priraštaj u tački $M(x,y,z)$ jednak:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+o(\rho)\quad (1)$$

gdje je $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$, a parcijalni izvodi se računaju u tački $(x(t),y(t),z(t))$.

Podijelimo (1) sa Δt i nađimo $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$. Zbog diferencijabilnosti fja x,y i z po t imamo da je:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial z}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}+$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}\quad(2)$$

Pokažimo da je $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=0$. Zaista,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}=\cancel{\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}}.$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}=0\cdot\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=0$$

Zamijenimo ovo u (2). Dobijemo da je

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

ili $\quad u_t'=u_x'x_t'+u_y'y_t'+u_z'\cdot z_t'$.

Primjer Naći izvod u'_t za f-ju $u = x^2+y^2+z$, gdje je
$x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \cos t \cdot \sin t$

Rješenje $u'_x = 2x$, $u'_y = 2y$, $u'_z = 1$
$x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, $z'_t = \cos 2t$

$u'_t = -2ax\sin t + 2ay\cos t + \cos 2t = 2a^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) + \cos 2t =$
$= \cos 2t$

Primjetimo da ako zamjenimo x, y, z u f-ju $u \Rightarrow$
$u = 1 + \cos t \sin t$, $u'_t = \cos 2t$.

Primjer $z = \ln(x^2+y^2)$
$x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$
$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ - ?

Neka je zadata neprekidno diferencijabilna f-ja $u = f(x,y,z)$
gdje je $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$ - nepr. dif. f-je promjenljivih s i t.
Onda je definisana složena f-ja $u = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = \phi(s,t)$.
dvije promjenljive s i t.
Pri računanju parcijalnih izvoda f-je $\phi(s,t)$ jedna promjenljiva se fiksira, to se ovaj slučaj svodi na gore razmatrani slučaj, pa se parcijalni izvodi $\frac{\partial u}{\partial s}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ računaju:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Primjer Neka je data f-ja $u(x,y)$. Preći na polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ i izračunati $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ i $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

Rješenje
$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \rho\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi$$

Ako je $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ - nepr. dif. f-je

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Ako je $x_1 = x_1(t_1, \dots, t_m), x_2 = x_2(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$

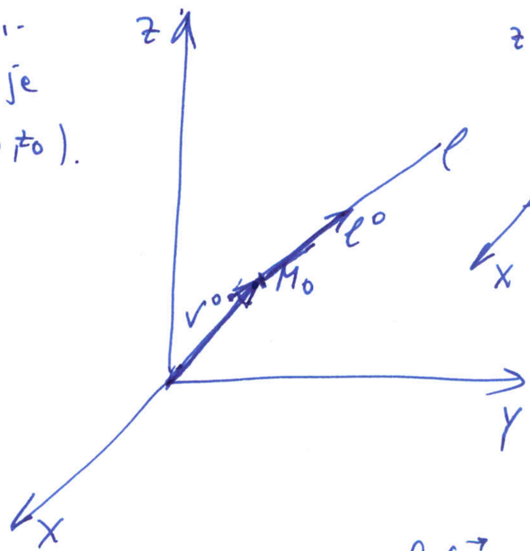
$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

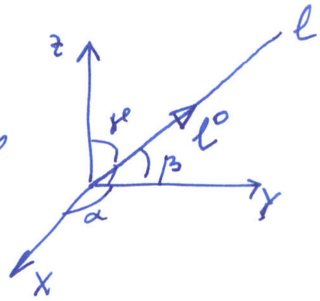
Izvod po pravcu. gradijent

Izvod po pravcu

Neka je l pravac na površi ili u prostoru koji je dat jediničnim vektorom $\vec{l}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ gdje su α, β, γ uglovi koje zaklapa prava l sa osama x, y i z.

Neka je $u = f(x, y, z)$ dif. u nekoj okolini M_0 čiji je radijus vektor $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$.





Ako postoji granična vrijednost $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\vec{r}_0 + t\vec{l}^0) - f(\vec{r}_0)}{t}$ to se taj gran. vrijednost naziva izvodom fje $u = f(x, y, z)$ u tački M_0 po pravcu l i označava se sa $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ ili $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$. Znači po definiciji

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0} \frac{u(\vec{r}_0 + t\vec{l}^0) - u(\vec{r}_0)}{t} \qquad (1)$$

Uzmimo parametarske jednačine pravca l koji ide iz tačke M_0:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta \quad z = z_0 + t\cos\gamma, \quad t \geq 0$$

Tada u tačkama pravca l dobijemo fju

$$u = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) = F(t)$$

Tada iz (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(+0)$$

Znači da se izvod $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ poklapa sa izvodom $F'(+0)$.

Ako je $u = f(x,y,z)$ neprekidno diferencijabilna u tački M_0 tada

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

Ako za l uzmemo pravac X ose tada je $l^0 = (1,0,0)$. Tada iz formule (2) slijedi da je $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$ tj. izvod po pravcu X ose je parcijalni izvod funkcije po promjenljivoj x. Analogno izvodi po pravcima duž Y i Z ose.

Izvod funkcije u datoj tački po datom pravcu jednak je brzini promjene funkcije u toj tački po zadatom pravcu.

__Primjer__ Temperatura tijela u prostoru se zadaje fjom: $T = x^2y + yz + e^{xy}$. Nađi brzinu promjene temperature u tački $M(1,1,1)$ po pravcu od te tačke do koordinatnog početka.

__Rješenje__ $l = \overrightarrow{MO} = (-1,-1,-1)$. Tada je

$$l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial x} = \left(2xy - ye^{xy}\right)_{M_0} = 2-e, \quad \frac{\partial T(M_0)}{\partial y} = \left(x^2 + z - xe^{xy}\right)\Big|_{M_0} = 2-e$$

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial z} = y\Big|_{M_0} = 1$$

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial l} = (2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2e-5}{\sqrt{3}}$$

Primjetimo da egzistencija izvoda fje u datoj tački po svim pravcima ne garantuje diferencijabilnost fje u toj tački

__Primjer__

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Ova fja je neprekidna po svakoj pravoj $y = kx$ koja prolazi kroz $(0,0)$. Ova fja je i diferencijabilna po svakom pravcu kroz tu tačku.

$l^0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t\cos\alpha - t^2\sin^2\alpha} = 0$

Ali ova fja nije neprekidna u $(0,0)$ pošto ona teži $\to \infty$ po paraboli $x = y^2$
i nije diferencijabilna u $(0,0)$ jer u njoj nije neprekidna.

Izvod duž glatke krive

Izvodom duž glatke krive Γ u datoj tački $M_0 \in \Gamma$ nazivamo izvodom ~~po~~ u pravcu tangente na krivu u tački M_0.

Ako je $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametarske jednačine krive Γ

gdje je t - parametar.

Vektor $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ je vektor pravca tangente na krivu Γ u tački $M_0 \in \Gamma$.

Tada veličina

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{x'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{y'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{z'(t)}{|\vec{\tau}|}$$

je traženi izvod po pravcu tangentnog vektora.

tj. izvod po krivoj Γ.

Primjer $u = xyz$ naći izvod duž krive $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ u tački M_0 koja odgovara parametru $t = \pi/2$

$$\vec{\tau}(M_0) = (-a\sin t, a\cos t, b)\Big|_{t=\pi/2} = (-a, 0, b), \quad |\vec{\tau}(M_0)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Tada je

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{x'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{y'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{z'(t)}{|\vec{\tau}|} \right)\Big|_{t=\pi/2} =$$

$$= \frac{yz(-a\sin t) + xz(a\cos t) + xyb}{|\vec{\tau}|}\Big|_{t=\pi/2} = -\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ako je f-ja $u = f(x_1, x_2, .., x_n)$ nepr. dif. f-ja n-promjenlj. to je njen izvod po pravcu l u datoj tački $M_0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$ veličina

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1} \cos\alpha_1 + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2} \cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_n} \cos\alpha_n$$

gdje su α_i, $i = 1, 2, .., n$ - uglovi između pravca l i osama x_i prostora $\mathbb{R}^n$, $l^0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ - ort pravca l.

Gradijent funkcije

Gradijentom diferencijabilne f-je $u=f(x,y,z)$ u tački M nazivamo vektor, koji ima koordinate $\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}$ i označavamo ga simbolom grad u ili ∇u. Znači po definiciji je

$$\operatorname{grad} u(M) = \nabla u(M) = \left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k} \quad (1)$$

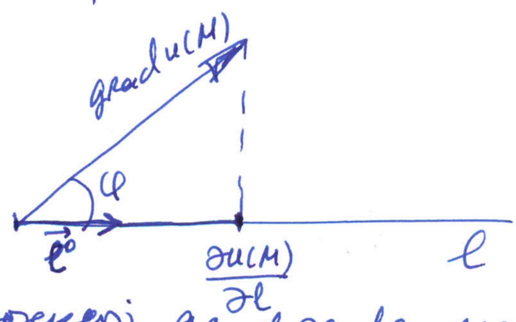
Iz definicije izvoda po pravcu i def. gradijenta slijedi da je

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M), l^0) = (\nabla u, l^0)$$

tj. izvod po pravcu l u tački M je skalarni proizvod vektora grad $u(M)$ i jediničnog vektora l^0 pravca l. Pošto je $|l^0|=1$ to je

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(M)| \cdot \cos\varphi = pr_{l^0} \operatorname{grad} u$$

gdje je $\varphi = \sphericalangle(\operatorname{grad} u(M), l^0)$



Znači, izvod po pravcu je jednak projekciji gradijenta na pravac diferenciranja. Odavde slijedi, da ako je grad $u(M) \neq \vec{0}$ to ~~j~~ izvod $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ ima maksimalnu vrijednost kada se pravac l poklapa se pravcem gradijenta funkcije u u tački M (tj. $\varphi=0$).

Znači izvod po pravcu gradijenta je

$$\left.\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|_{l=\operatorname{grad} u} = |\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2}.$$

U suprotnom smjeru $-$grad$u$ izvod $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ ima minimalnu vrijednost i jednaka je $-|\operatorname{grad} u(M)|$.

Po ostalim pravcima izvod $\frac{\partial u(M)}{\partial l}$ uzima vrijednosti sa intervala $(-|\operatorname{grad} u(M)|, |\operatorname{grad} u(M)|)$.

Znači, ako je grad $u(M) \neq 0$ to brzina rasta f-je u je maksimalna i jednaka $|\operatorname{grad} u(M)|$ u pravcu vektora grad u.

Z) U suprotnom pravcu funkcija u opada s maksimalnom brzinom $-|grad\, u(M)|$.

Znači pravac l koji se zadaje vektorom $grad\, u$ je pravac najbržeg rasta, a pravac definisan vektorom $(-grad\, u)$ je pravac najbržeg spusta.

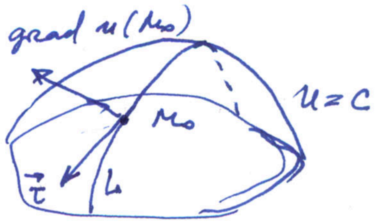
Primjer Gustina prostiranja čestica u pr-ru se zadaje funkcijom
$$\rho = \frac{x^2+y^2}{1+z^2}.$$
U kom pravcu se gustina najbrže mijenja u tački $M_0 = (-1,3,2)$? Naći brzinu najbrže promjene gustine u datoj tački.

Rješenje Pravac najbrže promjene gustine poklapa se s pravcem
$$grad\, \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}\right). \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2x}{1+z^2},\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{2y}{1+z^2},\ \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{2z(x^2+y^2)}{(1+z^2)^2}$$

Tada $grad\, \rho(M_0) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

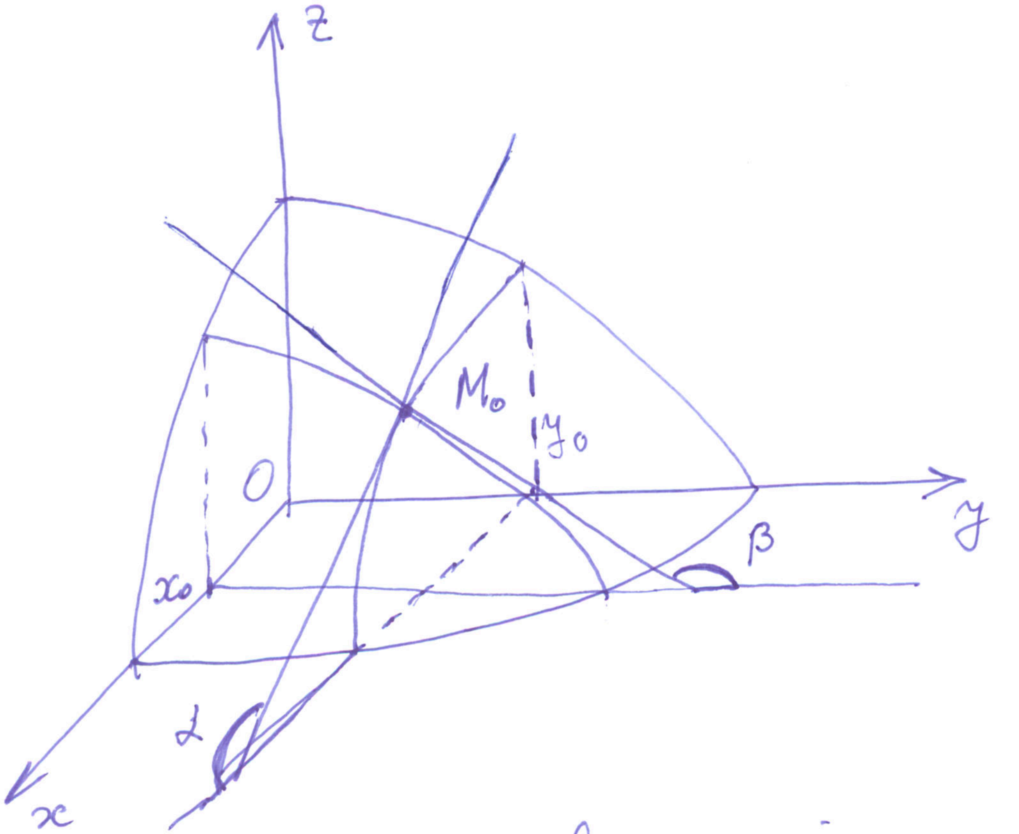
Znači u pravcu vektora $\left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ gustina raste maksimalno s brzinom $|grad\, \rho(M_0)| = \frac{\sqrt{104}}{5}$. ▲

Gradijent je normalan na ~~po~~ tangentnoj površi (liniji) fje $u = f(x,y,z)$ u tački $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ te površi



Na kraju primijetimo da je gradijent glatke fje $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je dužan
$$grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$
i izvod fje u ~~po~~ u pravcu gradijenta je jednak
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{(grad\, u, \vec{l})}{|\vec{l}|} \quad \text{gdje je } \vec{l} \text{ vektor pravca } l.$$

Geometrijski smisao parcijalnih izvoda funkcije dvije promjenljive



Grafik funkcije $z=f(x,y)$ je neka površ (slika). Neka je (x_0,y_0) tačka iz xOy ravni. Fiksirajmo $y=y_0$. Grafik fje $z=f(x,y_0)$ je kriva koja je presjek površi sa ravni $y=y_0$. Iz geometrijskog smisla izvoda fje jedne promjenljive ~~je~~ imamo da je

$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha$, gdje je α ugao između ose Ox i tangente na krivu $z=f(x,y_0)$ u tački $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Slično se vidi da je $f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta$.